UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

Ejercicios sugeridos para :

los temas de las clases del 26 y 28 de mayo de 2009.

Temas :
Espacios vectoriales. Subespacios.
Combinaciones lineales. Subespacio generado.
Secciones 4.2, 4.3, 4.4 del texto.

Observación importante:
es muy importante que Usted resuelva también muchos ejercicios del texto.

E1.-Resuelva con detalle los ejercicios 16, 17 de la sección 4.2, pag. 298 del texto[Grossman v edición].
[**ojo :** si Usted está usando la **sexta** edición, se trata de los ejercicios 18, 19 de pag. 288]
En ámbos ejercicios se define una misma suma en R^2 en la forma siguiente :

$$(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1+x_2+1,\ y_1+y_2+1) ;$$

En el ejercicio #16 , la multiplicación por escalares es la usual : $\alpha(x, y)=(\alpha x, \alpha y)$;
En el ejercicio #17 : $\alpha\otimes(x, y) = (\alpha+\alpha x-1, \alpha+\alpha y-1)$.
En particular indique (y justifique) cuales de los axiomas de espacio vectorial no se cumplen en #16 ; también justifique con detalle que en #17 se cumplen las dos propiedades distributivas .
[la tabla de los 10 axiomas que definen "espacio vectorial" se halla en la pag. 292 de la v edición y 288 de la vi edición]

E2.- Averigüe (y justifique) cuales de los siguientes conjuntos [con las operaciones de suma y multiplicación por escalares usuales] son espacios vectoriales y cuales no.

E2a) Todas las matrices de un mismo tamaño, mxn , con componentes reales ;

E2b) todas las matrices de tamaño 2x3 con almenos una componente =0 ;

E2c) todas las matrices de tamaño 2x3 con almenos una componente $\neq 0$;

E2d) todos los polinomios, P(x), con coeficientes reales;

E2e) todas las funciones f: $R\rightarrow R$ continuas ;

E2f) todas las funciones f: $R\rightarrow R$ **no** continuas ;

E2g) el espacio cartesiano R^n con la suma y la multiplicación definidas tratando los puntos como "vectores fila" :
$\mathbf{x}=(x_1, x_2,..., x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2,..., y_n)$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2,..., x_n+y_n)$, $\alpha\mathbf{x}=(\alpha x_1, \alpha x_2,..., \alpha x_n)$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

E2h) el conjunto de todas las matrices 2x2, con determinante nulo;

E2i) el conjunto de todas las matrices 2x2, con determinante **no** nulo;

E2j) el conjunto de todos los polinomios cuyos coeficientes son todos positivos o nulos.

E3.- En cada uno de los siguientes caso, donde se asigna un espacio vectorial, V, y un subconjunto, W, del mismo, diga, justificando, si W [con las operaciones inducidas por las de V] es subespacio de V o no.

E3a) $V = P_4$ [= espacio vectorial formado por los polinomios de grado ≤ 4 (incluyendo el polinomio nulo) , $W = \{f \in P_4 \mid f(17)= 0\}$ = subconjunto de los polinomios de P_4 que se anulan en x=17;

E3b) $V = P_4$ [= espacio vectorial formado por los polinomios de grado ≤ 4 (incluyendo el polinomio nulo) , $W = \{f \in P_4 \mid f(17)f(11)= 0\}$ = subconjunto de los polinomios de P_4 que se anulan en x=17 ó en x=11;

E3c) $V= M_{2,3}$ (matrices reales de tamaño 2x3); $W=\{A=(a_{i,j})\in M_{2,3} \mid a_{1,2}+ a_{2,2}+a_{1,3}=0\}$;

E3d) $V=R^3$ (tratando los puntos como "vectores fila"); $W = \{(x, y, z) \mid x+2y-5z=0\}$;

E3e) $V=R^3$, $W = \{(x, y, z) \mid x+2y-5z=1 \}$;

E3f) $V=R^3$, $W=\{(0, 0, 0)\}$;

E3g) $V=R^3$, $W= \{ (x, y, z) \mid x=2t, y=-t, z=7t, t\in R\}$;

E3h) $V= M_{3,3}$, $W= \{ A\in M_{3,3} \mid$ A es antisimétrica$\}$;

E3i) $V= M_{3,3}$, $W= \{ A\in M_{3,3} \mid$ A es triangular superior$\}$;

E4) Demuestre que si W, H son dos subespacios de cierto espacio vectorial V, entonces $V\cap H$ también es subespacio, mientras que $V\cup H$ generalmente no lo es.
[Nota : el conjunto $V\cap H$ (intersección de V con H) está formado por todos los vectores comunes a V y H; el conjunto $V\cup H$ (unión de V con H) está formado por todos los vectores que pertenecen a almenos uno de los dos]

E5). Sabemos que dos vectores **u** , **v** , de R^3 (o de R^n) son perpendiculares, si y sólo si su producto escalar es nulo : **u.v**=0 .
Demuestre que si W = gen{**u , v**} , es el subespacio de R^n generado por los vectorese **u** , **v** entonces, para que un vector, **v** , sea perpendicular a <u>todos</u> los vectores de W, es suficiente que **v** sea perpendicular a **u** y **v.**

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

E6. Averigüe que los siguientes subconjuntos de R^3 son subespacios de R^3 :
i) el "subespacio espacio nulo", {(0, 0, 0) } , cuyo único vector es el vector nulo ;
ii) todo el espacio, R^3 ;
[{(0, 0, 0) } y R^3 se llaman a veces los "subespacios triviales"]
iii) rectas por el origen;
iv) planos por el origen.

E7. Sea W cualquier subespacio de R^n y consideremos el conjunto de todos los vectores de R^n que sean perpendiculares a todo vector de W . Este conjunto se llama generalmente el "complemento ortogonal de W" y se indica con el símbolo : $W^{\perp}$.
<u>Demuestre</u> que $W^{\perp}$ es subespacio vectorial de R^n.

E8. Para cada uno de los siguientes subespacios de R^3 , halle su complemento ortogonal.
[sugerencia : tome en cuenta el ejercicio **E5**].
E8a. W = gen{(1, 2, 3) } ;
E8b. W = gen{ (0, 0, 0) } ;
E8c. W = gen{ (1, 0, 2), (1, 1, 0) } ;
E8d. W = gen{ (1, 2, 2), (2, 2, 3), (1, 4, 3), (2, 6, 5) };
E8e. W = R^3,

E9.- Sea H = {a.(1, 2)+2.(a, 3)-7.(1, a) | a ∈ **R** }, es decir, H es el conjunto de t<u>odos</u> los vectores de R^2 que se obtienen con la fórmula a.(1, 2)+2.(a, 3)-7.(1, a) al variar de <u>a</u> en el conjunto de todos los reales.
E9a. Averigüe (y justifique) si H es un subespacio vectorial de R^2 ;
E9b. Halle la intersección de H con gen{(1, 2)}.

E10.- En cada uno de los casos siguientes, halle condiciones explícitas sobre las componentes de un vector genérico, para que dicho vector pertenezca al subespacio considerado:
E10a) W_A= gen{ (1, 2, 3), (2, 4, 6), (2,-1, 0), (1,-3,-3) } = subespacio de R^3;
en particular averigüe cuales de los siguientes vectores pertenecen al subespacio dado :
(1, 7, 9), (1, 1, 2) ;
E10b) W_B = gen{ (1, 2, 1,-1), (2, 3,-1, 2), (0, 1, 3,-4), (1, 1,-2, 3) }= subespacio de R^4;
en particular averigüe cuales de los siguientes vectores pertenecen al subespacio dado :
(1, 1, 1, 1), (4, 7, 1, 0), (7, 12, 1, 1) ;
E10c) W_C= gen{ $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}$ } = subespacio de $M_{2,2}$;
en particular averigüe cuales de los siguientes vectores pertenecen al subespacio dado :
$\begin{bmatrix}5 & 7\\7 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}7 & 5\\1 & 7\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 19\end{bmatrix}$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

E10d) W_D= gen{ $1+x+x^2$, $2-x+x^2$, $1-2x$, $3-3x+x^2$ } = subespacio de P_2 .
en particular averigüe cuales de los siguientes vectores pertenecen al subespacio dado :
$5+4x-2x^2$, $5-7x+x^2$, $1+7x+3x^2$, $3+9x+5x^2$, $9+3x+5x^2$.

E11.- Demuestre que si tres vectores **u, v, w** $\in$ R^3 , no nulos son dos a dos perpendiculares, entonces ninguno de los tres se puede obtener como combinación lineal de los otros dos.

respuestas.

SE1) La verificación de las propiedades ii-iii-iv-v de la tabla [pag. 292 del texto, v edición y 282 vi edición]es igual en los dos ejercicios #16, 17, ya que la definición de "suma" es la misma.
Por ejemplo, el elemento neutro de la suma resulta ser (-1,-1) y el opuesto de (x, y) resulta ser (-x-2,-y-2) , ya que , por ejemplo, $(-1,-1)\oplus(x,y) =(-1+x+1,-1+y+1) = (x, y)$,
$(x, y)\oplus(-x-2,-y-2) = (x+(-x-2)+1, y+(-y-2)+1) = (-1,-1)$;
las propiedades ii,v se verifican facilmente. Por ejemplo, en el caso de la propiedad v :
$(x, y)\oplus(z, t) = (x+z+1, y+t+1) = (z+x+1, t+y+1) = (z, t)\oplus(x, y)$.

R^2 con las operaciones definidas en #16 cumple con todas las propiedades excepción hecha para las dos propiedades distributivas (vii, viii) .
Por ejemplo : $a((x, y)+(z, t)) = a(x+z+1, y+t+1) = (ax+az+a, ay+at+a)$;
$a(x, y) = (ax, ay)$, $a(z, t)= (az, at)$;
$a(x, y)+a(z, t) = (ax, ay)+(az, at) = (ax+az+1, ay+at+1) \neq (ax+az+a, ay+at+a)$.

R^2 con las operaciones definidas en #17 cumple con todas las propiedades, sin excepciones.
Por ejemplo, verifiquemos las propiedades viii y x :
viii : $(a+b)\otimes(x, y) = ((a+b)+(a+b)x-1 , (a+b)+(a+b)y-1)$;
$(a\otimes(x, y))\oplus(b\otimes(x, y)) = (a+ax-1, a+ay-1)\oplus(b+bx-1, b+by -1) =$
$=((a+ax-1)+(b+bx-1)+1 , (a+ay-1)+(b+by-1)+1) = (a+b+(a+b)x -1, a+b+(a+b)y - 1)$.
x : $1\otimes(x, y)= (1+1.x-1, 1+1.y -1) = (x, y)$.

SE2) Son espacios vectoriales **a-d-e-g** .
SE2b) no está bien definida la suma; por ejemplo A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ tienen almenos una componente nula, sin embargo A+B= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ no tiene almenos una componente nula;

SE2c) A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; A+B= $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SE2f) la única función que pudiera actuar como elemento neutro respecto a la suma (propiedad iii) es la función nula, que es continua y no pertenece al conjunto aqui considerado; un argumento como este se podía también considerar en el caso **E2c**).

SE2h) A= $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix}0 & 0\\3 & 4\end{bmatrix}$, A+B= $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$; $|A|=0$, $|B|=0$, $|A+B|\neq 0$.

SE2i) A= $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$, A+B = $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$; $|A|\neq 0$, $|B|\neq 0$, $|A+B|= 0$.

SE2j) Sumando dos polinomios con coeficientes no negativos, se obtiene un polinomio con coeficientes no negativos. En este caso no está bién definida la multiplicación por números.
Por ejemplo el polinomio $(-1)(2+3x+4x^2) = -2-3x-4x^2$ (no tiene todos sus coeficientes no negativos).

SE3) observación importante.
Para verificar que un subconjunto, W, de cierto espacio vectorial V, [con las operaciones de suma y multiplicación por números inducidas] es un subespacio es suficiente verificar que :
1) $W\neq\emptyset$; 2) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v} \in W$; 3) $r \in R, \mathbf{u} \in W \Rightarrow r.\mathbf{u} \in W$.
La condición 2) expresa el "cierre de W respecto a la operación de suma" dada en V ;
la condición 3) expresa el "cierre de W respecto a la operación de multiplicación por escalares" dada en V ;
Otra observación.
A estas dos condiciones 2), 3) se debe el enunciado (poco conveniente) de los axiomas i, vi de la tabla de pag, 292 del texto.
Sería mejor reemplazar estos dos enunciados por los siguientes :
i') "en V está definida una operación de <u>suma de vectores</u>" [cuyo resultado es un vector de V];
vi') "en V está definida una operación de <u>multiplicación de vectores por escalares</u>" [cuyo resultado es un vector de V].

Son subespacios a-c-d-f-g-h-i ; no son subespacios b-e.

SE3a) $(x-17)\in W \Rightarrow W\neq\emptyset$;
$f\in W$, $g\in W \Rightarrow f(17)=g(17)=0 \Rightarrow (f+g)(17)=f(17)+g(17) = 0+0 = 0 \Rightarrow f+g\in W$;
$r\in R$, $f\in W \Rightarrow f(17)=0 \Rightarrow (rf)(17) = r(f(17))= r.0 = 0 \Rightarrow rf\in W$.

SE3b) sean f=x-11, g=x-17 ; como (f+g)(11)= -6 , (f+g)(17) = 6 se tiene que $(f+g)\notin W$; por lo tanto, como f, g $\in$ W pero $(f+g)\notin W$, no se cumple el cierre respecto a la suma (propiedad 2)).

SE3c) $\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} \in W \Rightarrow W\neq\emptyset$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA1116 abril-julio de 2009**
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}] \in W \Rightarrow a_{12}+a_{22}+a_{13}=b_{12}+b_{22}+b_{13}=0$; $C=A+B=[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$;
$c_{12}+c_{22}+c_{13}= (a_{12}+b_{12})+(a_{22}+b_{22})+(a_{13}+b_{13}) = (a_{12}+a_{22}+a_{13})+(b_{12}+b_{22}+b_{13})=$
$= 0+0 = 0 \Rightarrow A+B\in W$;
$r\in R$, $A=[a_{ij}] \in W \Rightarrow a_{12}+a_{22}+a_{13}=0 \Rightarrow rA= [ra_{ij}]$,
$ra_{12}+ra_{22}+ra_{13}=r(a_{12}+a_{22}+a_{13})=0 \Rightarrow rA\in W$.

SE3e) $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3) \in W \Rightarrow (x_1+y_1)+2(x_2+y_2)-5(x_3+y_3)=$
$=(x_1+2x_2-5x_3)+(y_1+2y_2-5y_3)= 1+1 = 2\neq 1 \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y}\notin W$; no se cumple el cierre respecto as la suma (tampoco se cumple el cierre respecto a la multiplicación por números).

Otra observación importante.
En **E3d)** el subconjunto W de R^3 está definido por una ecuación lineal homogénea;
en **E3g)** el conjunto W (que es una recta por el origen) se puede definir por el sistema homogéneo $\begin{cases} x+2y=0 \\ 7y+z=0 \end{cases}$; es fácil verificar que, en general, el conjunto de todas las soluciones de un sistema homogéneo en n incógnitas (y cualquier número de ecuaciones) es un subespacio vectorial de R^n [en efecto es un conjunto no vacío de R^n y se cumplen el cierre respecto a la suma y el cierre respecto a la multiplicación por números].

SE4) Como W, H contienen ámbos el vector nulo de V, se tiene que $W\cap H\neq\emptyset$;
$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W\cap H \Rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ luego $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W$, $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in H \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v} \in W\cap H$.
$r \in R$, $\mathbf{u} \in W\cap H \Rightarrow \mathbf{u} \in W$, $\mathbf{u} \in H$ luego $r\mathbf{u} \in W$, $r\mathbf{u} \in H \Rightarrow r\mathbf{u} \in W\cap H$.
$W\cup H$ es un subespacio sólo en el caso que uno de los dos H, W esté contenido en el otro.
En el caso que esto no se cumpla, existirá un vector $\mathbf{u}\in H$, con $\mathbf{u}\notin W$ y otro vector, $\mathbf{v}\in W$. con $\mathbf{v}\notin H$; como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W\cup H$ deberíamos tener $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W\cup H$ para que se cumpla el cierre respecto a la suma. Sin embargo, si fuese $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W\cup H$ deberíamos tener $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W$ o $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in H$, ninguna de las cuales se cumple. Por ejemplo si fuese $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W$ seguiría (como $\mathbf{v}\in W$) $\mathbf{u}= \mathbf{w}-\mathbf{v} \in W$ mientras que sabemos que por hipóteses $\mathbf{u}\notin W$.
Análogamente en el otro caso.

SE5) Todo vector, $\mathbf{w} \in W$ se puede expresar con una combinación lineal de **u , v** :
$\mathbf{w} = a\mathbf{u}+b\mathbf{v}$; luego, si $\mathbf{w}.\mathbf{u}=\mathbf{w}.\mathbf{v}= 0$ se tiene :
$\mathbf{w}.(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}) = \mathbf{w}.(a\mathbf{u})+\mathbf{w}.(b\mathbf{v})= a\mathbf{w}.\mathbf{u}+b\mathbf{w}.\mathbf{v} = a.0+b.0=0$.

SE6) i), ii) se averigua facilmente que para todo espacio vectorial, el conjunto que contiene solo al vector nulo así como el subconjunto que contiene a todos los vectores del espacio dado, cumplen ámbos con las tres condiciones para que cierto subconjunto sea subespacio.
iii) Toda recta por el origen se puede representar con la ecuación vectorial $\mathbf{OP}= t\mathbf{u}$,siendo **u** un vector no nulo. Por lo tanto bastará verificar que el conjunto $W=\{t\mathbf{u} \mid t \in R\}$ cumple con las tres condiciones : $W\neq\emptyset$, cierre respecto a la suma y cierre respecto a la multiplicación por números.
Con t=0 obtenemos el vector nulo, $\mathbf{o}=0\mathbf{u} \in W \Rightarrow W\neq\emptyset$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

dados dos vectores cualesquiera de W : $t_1\mathbf{u}$, $t_2\mathbf{u}$, tenemos $t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{u} = (t_1 + t_2)\mathbf{u} \in W$ [cierre respecto a la suma] y ,análogamente,
dados $t\mathbf{u} \in W$, $\lambda \in R \Rightarrow \lambda(t\mathbf{u}) = (\lambda t)\mathbf{u} \in W$
[cierre respecto a la multiplicación por números];
iv) Considerando ahora el caso de un plano por el origen, de ecuación ax+by+cz = 0, vemos que todos los vectores **OP**= (x, y, z) cuyas coordenadas cumplen con la ecuación del plano, estan representados por las soluciones de la ecuación homogénea del plano y basta entonces recordar lo observado en la "**otra observación importante**" de la pag. 6 de este mismo problemario.

SE7. Verifiquemos que $W^\perp$ cumple con las tres propiedades que es conveniente verificar para asegurar que se trata de un subespacio.
i) $W^\perp$ no es vacío, ya que seguramente contiene al vector nulo, que es perpendicular a todo vector, ya que el producto escalar del vector nulo por cualquier vector siempre es = 0 ;
ii) cierre respecto a la suma : si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^\perp$, para todo vector, $\mathbf{w}$ de W se tiene
$\mathbf{u.w} = \mathbf{v.w} = 0$ y por consiguiente $(\mathbf{u}+\mathbf{v}).\mathbf{w} = \mathbf{u.w} + \mathbf{v.w} = 0+0 = 0 \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v} \in W^\perp$;
iii) cierre respecto al producto por escalares : $\mathbf{v} \in W^\perp$, λ= número y $\mathbf{v.w} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda\mathbf{v}).\mathbf{w} = \lambda(\mathbf{v.w}) = \lambda.0 = 0 \Rightarrow \lambda\mathbf{v} \in W^\perp$.

SE8. a) Resolviendo el sistema homogéneo de una sola ecuación : $[1\ 2\ 3 \,|\, 0]$ se obtiene :
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow W^\perp$= gen{ (-2, 1, 0) , (-3, 0, 1) } ; tambien podíamos observar que $W^\perp$ es el plano perpendicular a la recta W= gen{ (1, 2, 3) } por lo cual
$W^\perp = \{ (x, y, z) \mid x+2y+3z = 0 \}$;
b) R^3 ;
c) podemos hallar la solución del sistema homogéneo cuya matriz de los coeficientes es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ u observar que W es el plano que pasa por el origen y es paralelo a los dos vectores dados, por lo cual $W^\perp$ es la recta perpendicular a tal plano y un vector paralelo a la misma se puede obtener con el vector producto vectorial :
$(1\ 0\ 2)x(1\ 1\ 0) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-2, 2, 1)$. $W^\perp$ = gen{ (-2, 2, 1) } .

d) considerando el sistema homogéneo cuya matriz de los coeficientes es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ y

escalonando tal matriz : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ vemos que W=gen{ (1 2 2), (0 2 1) } por lo cual
$W^\perp$ = gen{(1 2 2)x(0 2 1) } = gen{(2 , 1, -2)};

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

e) $W^{\perp}$ = gen{ (0, 0, 0) } ;

SE9a. No es subespacio. Por ejemplo podemos observar que no se cumple el cierre respecto a la suma. El genérico vector de H es : a.(1, 2)+2.(a, 3)-7.(1, a)= (3a-7, -5a+6); a título de ejemplo, **u**= (-7, 6) ∈ H , sin embargo **v**= 2**u** = (-14, 12) no pertenece a H ,

ya que para ningún valor de a se tiene $\begin{cases} 3a-7 = -14 \\ -5a+6=12 \end{cases}$.

SE9b. (3a-7, -5a+6)= t(1, 2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-7=t \\ 5a+6=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-t=7 \\ 5a-2t=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 53 \end{bmatrix}$, luego H∩gen{(1, 2)} = {(53, 106)}.

10a) Un vector, (a, b, c)∈ R^3 pertenece al subespacio dado, si y sólo si existen números x_1, x_2, x_3, x_4, tales que $x_1(1, 2, 3)+x_2(2, 4, 6)+x_3(2,-1, 0)+x_4(1,-3,-3)=(a, b, c)$, es decir, tales que el sistema siguiente tenga solución : $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=a \\ 2x_1+4x_2-x_3-3x_4=b \\ 3x_1+6x_2-3x_4=c \end{cases}$; aplicando entonces el método usual para resolver este sistema, tenemos :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & a \\ 2 & 4 & -1 & -3 & b \\ 3 & 6 & 0 & -3 & c \end{array}\right] \Rightarrow ... \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (2a-b)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (3a-c)/6-(2a-b)/5 \end{array}\right]$$

⇒ para que el sistema tenga solución, es decir, para que el vector (a, b, c) sea combinación lineal de los vectores dados y por lo tanto pertenezca al subespacio generado : $\frac{3a-c}{6} - \frac{2a-b}{5} = 0 \Rightarrow 3a+6b-5c = 0$.
Así nos percatamos que el subespacio W_A es el plano de ecuación 3x+6y-5z = 0 .
Es entonces inmediato verificar que (1, 7, 9)∈ W_A , (1, 1, 2)∉ W_A .

10b) Procediendo igual que en el ejercicio **2a)** , tenemos que el vector (a, b, c, d) pertence a W_B si y sólo si el siguiente sistema tiene solución :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 3 & -2 & c \\ -1 & 2 & -4 & 3 & d \end{array}\right] \Rightarrow ... \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a-3b+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7a-4b-d \end{array}\right]$$

así que la condición para que el vector (a, b, c, d) pertenezca a W_B es que se tenga $\begin{cases} 5a-3b+c=0 \\ 7a-4b-d=0 \end{cases}$.
Es entoncers inmediato verificar que :
(1, 1, 1, 1)∉ W_B , (4, 7, 1, 0)∈ W_B, (7, 12, 1, 1)∈ W_B .

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA1116 abril-julio de 2009**
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

10c) Un vector $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pertenece a W_C si y sólo si existen números x_1, x_2, x_3, x_4, tales que $x_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, es decir, si y sólo si tiene solución el sistema siguiente :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2 & c \\ 1 & 3 & 1 & 0 & d \end{array}\right] \Rightarrow ...\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & d-a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-b \end{array}\right] \Rightarrow b=c .$$

Por lo tanto :

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \in W_C, \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \notin W_C, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 19 \end{bmatrix} \in W_C .$$

10d) Un vector, $a_0+a_1x+a_2x^2$, pertenece a W_D, si y sólo si existen números, x_1, x_2, x_3, x_4, tales que $x_1(1+x+x^2)+x_2(2-x+x^2)+x_3(1-2x)+x_4(3-3x+x^2) = a_0+a_1x+a_2x^2$, es decir, si y sólo si el siguiente sistema tiene solución :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & a_0 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & a_1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & a_2 \end{array}\right] \Rightarrow ...\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & a_0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & a_0-a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_0+a_1-3a_2 \end{array}\right] \Rightarrow 2a_0+a_1-3a_2 =0 .$$

Por lo tanto : $5+4x-2x^2 \notin W_D$, $5-7x+x^2 \notin W_D$, $1+7x+3x^2 \in W_D$, $3+9x+5x^2 \in W_D$, $9+3x+5x^2 \notin W_D$.

SE11) Si uno de los tres vectores, por ejemplo **w,** fuese combinación lineal de los otros dos, tendríamos $\mathbf{w} = a\mathbf{u}+b\mathbf{v} \Rightarrow a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+(-1)w =0$ por lo cual la ecuación vectorial $x_1\mathbf{u}+x_2\mathbf{v}+x_3\mathbf{w}=o$ **,** de incógnitas x_1, x_2, x_3 tendría una solución no nula , a saber $(x_1, x_2, x_3) = (a, b, -1)$. Pongamos en evidencia que esto no puede ser.
Sea $x_1\mathbf{u}+x_2\mathbf{v}+x_3\mathbf{w}=o$; multiplicando escalarmente por **u** ámbos miembros, se obtiene :
$x_1|\mathbf{u}|^2+x_2(\mathbf{u.v})+x_3(\mathbf{u.w})= x_1|\mathbf{u}|^2+x_2(0)+x_3(0)= x_1|\mathbf{u}|^2=0$
y como por hipótesis $|\mathbf{u}|\neq 0$ sigue $x_1=0$; análogamente, multiplicando por **v**, **w** se pone en evidencia que $x_2=0$, $x_3=0$.